1е. Баға эволюциясының биномдық моделі.

1. Ықтималдықтар теориясында $ρ және q, ρ+ q=1$ ықтималдығы бар, тек 1 және 0 мәндерін алатын, тәуелсіз бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалардан тұратын

$$δ=(δ\_{1},δ\_{2},…),$$

Бернулли схемасы ерекше рөл атқарады.

Дәл осы схема үшін алынған ықтималдық теориясының алғашқы шекті теоремасы - Үлкен сандар заңы, кез-келген $ε>0$ үшін мына арақатынас орындалады

$$P\left(\left|\frac{S\_{n}}{n}-p\right|>ε\right)\rightarrow 0, n\rightarrow \infty ,$$

Мұндағы $ \frac{S\_{n}}{n}=\left(\frac{δ\_{1}+…+δ\_{n}}{n}\right)$- $δ\_{1}+…+δ\_{n}$ арасындағы "бірліктердің" пайда болу жиілігі.

Дәл осы схема үшін ықтималдықтар теориясының көптеген басқа керемет нәтижелері орнатылды (Муавр-Лаплас шекті теоремасы, үлкен сандардың заңы, логарифм заңы, арксинус заңы және т. б.) олар әлдеқайда кең қолдану мүмкіндігіне ие болды.

Бұл тұрғыда, төменде енгізілген Кокс - Росс - Рубинштейн биномдық моделі қаржылық математикада классикалық ықтималдық теориясындағы бернулли схемасына ұқсас рөл атқарады, өте қарапайым болғандықтан, бұл модель көптеген қаржылық сипаттамаларды, мысалы, опциондардың әділ бағаларын, хеджирлеу стратегияларын және т. б. толық есептеуге мүмкіндік береді.

2. Барлық қаржылық операциялар (B,S)-нарықта, $B=(B\_{n})\_{n\geq 0}$- банктік шоттан және бағасы $ S=(S\_{n})\_{n\geq 0}$болатын акциялардан тұрады деп есептейміз.

B және S эволюциясын келесідей жазамыз

$$B\_{n}=(1+r\_{n})B\_{n-1}$$

$$S\_{n}=(1+p\_{n})S\_{n-1}$$

немесе

$$∆B\_{n}=r\_{n}B\_{n-1}$$

$$∆S\_{n}=p\_{n}S\_{n-1}$$

мұндағы $B\_{0}>0, S\_{0}>0.$

Банктік шоттың акциядан негізгі айырмашылығы мынада("банктік" пайыздық мөлшерлеме)

 $ r\_{n} F\_{n-1}$-өлшенетін,

ал ("нарықтық" пайыздық мөлшерлеме)

 $p\_{n} F\_{n}$-өлшенетін болып табылады,

мұндағы $ F\_{n}$- осы ықтималдық кеңістікте($Ω,F,P$) сүзгі (ақпарат ағыны)

 Биномдық модельде (B,S)- Кокс-Росс-Рубинштейн нарығында ("CRR- модель")

$$r\_{n}≡r=Const$$

Және $p=(p\_{n})\_{n\geq 1}$ бұл тәуелсіз Бернулли тізбегі $ p\_{1},p\_{2},…,$ екі мәнді қабылдайтын бірдей бөлінген кездейсоқ шамалардың тізбегі деп болжанады:

$$p\_{n}=\left\{\begin{array}{c}b,\\a,\end{array}\right. a<b.$$

$p\_{n}$ -ді келесідей жазамыз:

$$p\_{n}=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}ε\_{n}$$

немесе

$$p\_{n}=a+(b-a)δ\_{n}$$

табамыз

$$p\_{n}=\left\{\begin{array}{c}b,\\a,\end{array}\right. ⇔ ε\_{n}=\left\{\begin{array}{c}+1,\\-1,\end{array}\right. ⇔ δ\_{n}=\left\{\begin{array}{c}+1,\\0.\end{array}\right.$$

$r\_{n}$= const және $p\_{n}$, тек екі мәнді қабылдайды деген болжам бастапқы ықтималдық кеңістігі $Ω$ екілік тізбектердің кеңістігі деп санауға мүмкіндік береді:

$$Ω=\{a,b\}^{\infty }, Ω=\{-1,1\}^{\infty }, Ω=\{0,1\}^{\infty }$$

(2) қатынасынан аламыз

$$S\_{n}=S\_{0}\prod\_{k\leq n}^{}(1+p\_{k})$$

Бұл өрнекті § 1а-дан алынған (5) формуламен салыстыра отырып, біз $p\_{к}$ жоғарыда енгізілген $ \hat{h}\_{k}$ шамаларымен сәйкес келетінін көреміз. $S\_{n}$ келесідей түрде де ұсынылуы мүмкін екені түсінікті,

$$S\_{n}=S\_{0}e^{H\_{n}}=S\_{0}e^{h\_{1}+…+h\_{n}}$$

мұндағы $h\_{n}=ln⁡(1+p\_{k})$.

$a және b$ жағдайына тоқталсақ

$$a=λ^{-1}-1, b=λ-1,$$

мұндағы $λ>1$.

Мұндай жағдайда

$$S\_{n}=\left\{\begin{array}{c}λS\_{n-1}, p\_{n}=b \\λ^{-1}S\_{n-1}, p\_{n}=a\end{array}\right.$$

Егер $ε\_{n}=(\pm 1)$ (3) формуладан анықтасақ, онда $S\_{n}$ келесідей өрнектей аламыз

$$S\_{n}=S\_{0}λ^{ε\_{1}+…+ε\_{n}}$$

$$S\_{n}=S\_{0}e^{h\_{1}+…+h\_{n}}$$

мұндағы $h\_{k}=ε\_{k}lnλ$.

Осыдан көре аламыз, бұл жағдайда $S=(S\_{n})$ жиынтығы бойынша геометриялық адасудан басқа ештеңе жоқ.

$$E\_{S\_{0}}=\{S\_{0}λ^{k}:k=0,\pm 1,…\}$$

Егер $S\_{0}\in E=\{λ^{k}:k=0,\pm 1,…\}$ онда $E\_{S\_{0}}=E$. Бұл жағдайда $S=(S\_{n})$, $E=\{λ^{k}:k=0,\pm 1,…\}$ фазалық жиын бойынша Марковтық адасу бар деп айтылады.

$S=(S\_{t})\_{t\geq 1}$ биномдық модель геометриялық броундық қозғалыстың дискретті аналогы болып табылады, яғни мынадай кездейсоқ процесс түрінде

$$S\_{t}=S\_{0}e^{σW\_{t}+(μ-σ^{2}/2)t}$$

Мұндағы $W=(W\_{t})\_{t\geq 1}$-стандартты Винер процесі немесе стандарты броун қозғалысы.

Осыған байланысты, әдеттегі броундық қозғалыстың тиісті дискретті аналогы тің кейбір Бернулли тізбегі бар СН арифметикалық кездейсоқ адасуы екенін еске түсіру табиғи.

осыған байланысты, әдеттегі броундық қозғалыстың тиісті дискретті аналогы-кейбір Бернулли тізбегі $ξ=(ξ\_{n})\_{n\geq 1}$ болатын арифметикалық кездейсоқ адасуы $S\_{n}=S\_{n-1}+ξ\_{n}$ екенін еске түсіру табиғи.

4. Aлдыңғы презентацияда біз барлық қарастырулар кейбір сүзгіленген ықтималдық кеңістігінде ($Ω,F,P$) кейбір ықтималдық өлшемімен жүруден бастадық. Жалпы айтқанда, Р ықтималдық өлшемі дегеніміз және $p = P(p\_{n} = b)$ және $q = P\left(p\_{n} = a\right)$мәндері қарапайым емес. Белгілі бір мағынада ($Ω,F$) бір P ықтималдық өлшемі емес, ықтималдық өлшемдерінің бүкіл Тобы $F$ ={P} берілген, олар үшін тиісті мәндер $p = P(p\_{n} = b)$ интервалда(0, 1) аралығында болады. Қарастырылған биномдық модельдің ықтимал жалпылануы туралы мәселеге тоқтала отырып, $p\_{n} $ шамалары $a$ және $b$ екі мәнін емес, интервалдан алынған мәндерді [а, b] алады деген болжам да өте нақты болатынын атап өтеміз, ал жалпы айтқанда, $p\_{n}$ ықтималдығының таралуы болуы мүмкін, кез-келген[a, b] үлестіруінде . Дәл осындай модель §1С толық емес нарықтар деп аталатын опциондардың ұтымды құнын есептеу теориясына байланысты қарастырылады. Сол бөлімде $p\_{n} $ - "хаостикалық" шамалар деген ұғымға негізделген керемет тәсіл қарастырылады.